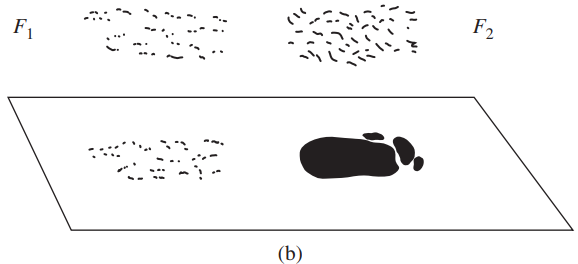
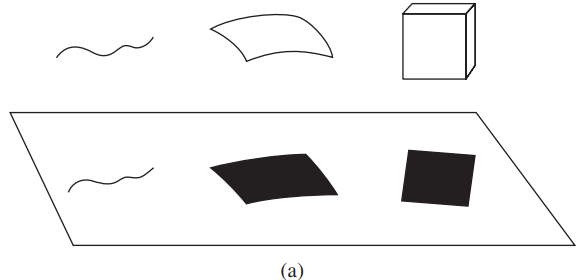
在本章中,我们考虑分形在低维子空间上的正交投影或“阴影”.平滑(一维)曲线通常在其平面上具有(一维)曲线作为其阴影,但是(二维)表面或(3维)固体物体通常具有二维阴影, 如图6.1a所示.我们研究了类似物的分形.凭直觉,如图6.1b所示,如果,则期望集合F具有尺寸为2的平面投影,如果,则具有尺寸为的平面投影.粗略地说,这是正确的,但是投影特性的精确公式化需要谨慎.

6.1 任意子集的投影 2020年6月18日10点59分

令是通过的原点的线,它与水平轴成角.我们用表示到的正交投影,因此,如果是的子集,则表示在上的投影(见图6.2).显然,如果,即是Lipschitz映射.从而

对于任何和,由命题3.3(a)确定.(由于proj𝜃F是线的子集,因此其维数不能大于1.)一个有趣的问题是,相反的不等式是否成立.投影定理告诉我们,几乎所有𝜃∈[0,𝜋）都是这样.也就是说,不等式(6.1)严格的𝜃例外值形成一组零长度集合,即零一维Lebesgue测度.



**图6.1** (a)经典集合在平面上的投影-曲线“通常”具有维度为1的投影,但曲面和立方体具有维度为2和正面积的投影.(b)分形集在平面上的投影.如果且,则的投影维度等于(零面积),的投影具有维度2和正面积.

投影定理6.1 设是一个Borel集.

1. 如果,则几乎满足所有.
2. 如果,则的长度为正(作为的子集),因此对于几乎所有,其维数均为1.

这些投影定理以自然的方式推广到更高的维度.令为中的维子空间或“通过原点的k平面”的集合.这些子空间自然地由坐标(“广义方向余弦”)参数化,因此我们可以在维Lebesgue度量方面以一致的方式引用“几乎所有”子空间.我们将编写为正交投影到平面上.

定理6.2 高维投影定理 设是一个Borel集.

1. 如果,则几乎满足所有.
2. 如果,则具有正维测度,因此对于几乎所有,其维数均为k.

6.2 整形维度s集的投影 2020年6月18日12点03分

定理6.3 令F为中的一个规则1集.则的长度为正,除了某一个值.

定理6.4 令F为中的一个不规则1集.则的长度几乎在所有上都为0.

推论6.5 令F为中的一个1集.如果F的规则部分具有-测度零，那么 几乎在所有上的长度都为零;否则,除的某个值外,所有长度都为正.

推论6.6 一个1集是规则的当且仅当其至少在两个方向上具有零长度投影.

定理6.8 设是的一个k集,其中k是整数.

1. 如果F是规则的，则对几乎所有都具有正维测度.
2. 如果F是不规则的,则对几乎所有都具有的零维测度.

6.3 任意集的整数维的投影

定理6.9 令是每个的的子集[使得集合是平面Lebesgue可测量的].然后存在一个Borel集使得

满足所有,

几乎满足所有.

特别是,对于几乎所有𝜃,集合和相差零长度.